Trụ sở chính:766/36-766/38 CMT8, P.5, Q. TÂN BÌNH, 38 420 372 – 38 460 835

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP THÀNH PHỐ
LỚP 9 – THCS (NĂM 2016 – 2017)
MÔN TOÁN
Thời gian làm bài: 150 phút
Ngày thi: 20/3/2017

Bài 1: (3 điểm)

Cho ba số a, b, c thỏa các điều kiện: $a-b=7; b-c=3.$

Tính giá trị của biểu thức $P=\frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{a^2-c^2-2ab+2bc}$.

Bài 2: (3 điểm)

Giải phương trình: $(2x-1)\sqrt{x+3}=x^2+3$

Bài 3: (3 điểm)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x(y-1)+y(x+1)=6 \\ (x-1)(y+1)=1 \end{cases}$

Bài 4: (4 điểm)

1) Cho 2 số thực dương x, y thỏa $\frac{x}{1+x}+\frac{2y}{1+y}=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=xy^2$
2) Tìm x, y nguyên thỏa mãn phương trình: $(x+y)(x+2y)=x+5$

Bài 5: (5 điểm)

1) Cho tam giác nhọn ABC có H là trực tâm. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AH. Đường phân giác trong góc A cắt MN tại K. Chứng minh rằng AK vuông góc với HK.
2) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi AH, AD lần lượt là đường cao , đường phân giác trong của tam giác ABC $(H, D \in BC)$. Tia AD cắt (O) tại E, tia EH cắt (O) tại F và tia FD cắt (O) tại K. Chứng minh rằng: AK là đường kính của (O).

Bài 6: (2 điểm)

Trong tuần, mỗi ngày Nam chỉ chơi một môn thể thao. Nam chạy ba ngày một tuần nhưng không bao giờ chạy trong hai ngày liên tiếp. Vào thứ Hai, anh ta chơi bóng bàn và hai ngày sau đó anh ta chơi bóng đá. Nam còn đi bơi và chơi cầu lông, nhưng không bao giờ Nam chơi cầu lông sau ngày anh ta chạy hoặc bơi. Hỏi ngày nào trong tuần Nam đi bơi?

HẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP THÀNH PHỐ
LỚP 9 – THCS (NĂM 2016 – 2017)
MÔN TOÁN
Thời gian làm bài: 150 phút
Ngày thi: 20/3/2017

Bài 1: (3 điểm)
Cho ba số a, b, c thỏa các điều kiện: $a-b=7;b-c=3.$

Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{a^2-c^2-2ab+2bc}$.

Ta có: $a-b=7;b-c=3\Rightarrow a-b+\left(b-c\right)=7+3\Leftrightarrow a-c=10$

Ta có: $P=\dfrac{\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2}{2\left(a^2-c^2-2ab+2bc\right)}=\dfrac{\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2}{2\left[\left(a-c\right)\left(a+c\right)-2b\left(a-c\right)\right]}$

$$=\frac{\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2}{2\left(a-c\right)\left(a+c-2b\right)}=\frac{\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2}{2\left(a-c\right)\left[\left(a-b\right)-\left(b-c\right)\right]}=\frac{7^2+3^2+10^2}{2\left[10\left(7-3\right)\right]}=\frac{79}{40}$$

Bài 2: (3 điểm)
Giải phương trình: $\left(2x-1\right)\sqrt{x+3}=x^2+3$

Điều kiện: $x\ge\dfrac{1}{2}$

Phương trình đã cho tương đương với:

$2x\sqrt{x+3}-\sqrt{x+3}=x^2+3$

$\Leftrightarrow x-\sqrt{x+3}=x^2-2x\sqrt{x+3}+x+3$

$\Leftrightarrow x-\sqrt{x+3}=\left(x-\sqrt{x+3}\right)^2$

$\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{x+3}\right)\left(x-\sqrt{x+3}-1\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-\sqrt{x+3}=0\\x-\sqrt{x+3}-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\sqrt{x+3}=x & (1)\\\sqrt{x+3}=x-1 & (2)\end{array}\right.$$

Giải (1), $\sqrt{x+3}=x\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge0\\x+3=x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge0\\\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\sqrt{13}+1}{2}\\x=\dfrac{-\sqrt{13}+1}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{13}+1}{2}$ (nhận)

Giải (2), $\sqrt{x+3}=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1\ge 0 \\ x+3=x^2-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x^2-3x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\sqrt{17}+3}{2} \\ x=\dfrac{-\sqrt{17}+3}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{17}+3}{2}$ (nhận)

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\dfrac{\sqrt{13}+1}{2};\dfrac{\sqrt{17}+3}{2}\right\}$

Bài 3: (3 điểm)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x(y-1)+y(x+1)=6 \\ (x-1)(y+1)=1 \end{cases}$

Ta có: $\begin{cases} x(y-1)+y(x+1)=6 \\ (x-1)(y+1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy-x+xy+y=6 \\ xy+x-y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy-x+y=6 \\ xy+x-y=2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3xy=8 \\ xy+x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3xy=8 \\ 3xy+3x-3y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3xy=8 \\ 8+3x-3y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3xy=8 \\ 3x-3y=-2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (3y-2)y=8 \\ 3x=3y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y^2-2y-8=0 \\ 3x=3y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=-\dfrac{4}{3} \end{array}\right. \\ x=y-\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{4}{3} \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=-\dfrac{4}{3} \end{cases} \end{array}\right.$

Bài 4: (4 điểm)

1) Cho 2 số thực dương x, y thỏa $\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{2y}{1+y}=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=xy^2$.

Ta có: $\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{2y}{1+y}=1 \Leftrightarrow x(1+y)+2y(1+x)=(1+x)(1+y)$

$\Leftrightarrow x+xy+2y+2xy=1+y+x+xy \Leftrightarrow y+2xy=1 \Leftrightarrow 2xy=1-y$

Do đó ta có: $xy^2=2xy.\dfrac{y}{2}=(1-y).\dfrac{y}{2}=\dfrac{-y^2+y}{2}=\dfrac{-4y^2+4y-1+1}{8}=\dfrac{1}{8}-\dfrac{(2y-1)^2}{8}\le\dfrac{1}{8}\Rightarrow P\le\dfrac{1}{8}$

Vậy $P_{max}=\dfrac{1}{8}$. Dấu ‘’=’’ xảy ra khi $y=\dfrac{1}{2}$ và $x=\dfrac{1}{2}$

2) Tìm x, y nguyên thỏa mãn phương trình: $(x+y)(x+2y)=x+5$

Cách 1: phương trình là bậc 2 (cả x lẫn y) với hệ số nguyên

Ta có: $(x+y)(x+2y)=x+5 \Leftrightarrow x^2+3xy+2y^2=x+5 \Leftrightarrow x^2+(3y-1)x+2y^2-5=0$

$\Delta_y=(3y-1)^2-4(2y^2-5)=y^2-6y+21$.

Để x, y nguyên thì Δ_y là số chính phương

$\Rightarrow$ Đặt $\Delta_y = \mathbf{k}^2$ (không mất tính tổng quát, ta giả sử $\mathbf{k} \in \mathbf{N}$)

$\Rightarrow \mathbf{y^2 - 6y + 21 = k^2}$

$\Rightarrow \mathbf{(y-3)^2 + 12 = k^2}$

$\Rightarrow \mathbf{(y-3-k)(y-3+k) = -12} \quad \mathbf{(-12 = -1.12 = -3.4 = -2.6)}$

Vì $\mathbf{k \in N}$ nên $\mathbf{y-3-k < y-3+k}$

Vì $\mathbf{(y-3-k)+(y-3+k) = 2y-6}$ là số chẵn

Nên $\mathbf{(y-3-k),(y-3+k)}$ có cùng tính chẵn lẻ.

Do đó chỉ có 2 trường hợp thỏa đề

TH1: $\begin{cases} \mathbf{y-3-k=-2} \\ \mathbf{y-3+k=6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{y-k=1} \\ \mathbf{y+k=9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{y=5} \\ \mathbf{k=4} \end{cases}$

Với y = 5, thế vào phương trình $\mathbf{(x+y)(x+2y) = x+5}$, ta được:

$\mathbf{(x+5)(x+10) = x+5 \Leftrightarrow (x+5)(x+10-1) = 0 \Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \mathbf{x=-5} \\ \mathbf{x=-9} \end{array}\right.$ (Thử lại thấy đúng)

TH2: $\begin{cases} \mathbf{y-3-k=-6} \\ \mathbf{y-3+k=2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{y-k=-3} \\ \mathbf{y+k=5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{y=1} \\ \mathbf{k=4} \end{cases}$

Với y = 1, thế vào phương trình $\mathbf{(x+y)(x+2y) = x+5}$, ta được:

$\mathbf{(x+1)(x+2) = x+5 \Leftrightarrow x^2+3x+2 = x+5 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \mathbf{x=1} \\ \mathbf{x=-3} \end{array}\right.$ (Thử lại thấy đúng)

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm nguyên $\mathbf{(x;y) = (-5;5),(-9;5),(1;1),(-3;1)}$

Cách 2: dùng kiến thức lớp 8, bổ sung hằng đẳng thức.

Ta có: $\mathbf{(x+y)(x+2y) = x+5 \Leftrightarrow x^2+3xy+2y^2 = x+5 \Leftrightarrow x^2+(3y-1)x+2y^2-5=0}$

$$\mathbf{\Leftrightarrow x^2 + 2.(x)\left(\frac{3y-1}{2}\right) + \left(\frac{3y-1}{2}\right)^2 - \frac{9y^2-6y+1}{4} + \frac{8y^2-20}{4} = 0}$$

$$\mathbf{\Leftrightarrow \left(x+\frac{3y-1}{2}\right)^2 - \frac{y^2-6y+21}{4} = 0}$$

$$\mathbf{\Leftrightarrow (2x+3y-1)^2 - (y^2-6y+21) = 0}$$

$$\mathbf{\Leftrightarrow (2x+3y-1)^2 - (y^2-6y+9) = 12}$$

$$\mathbf{\Leftrightarrow (2x+3y-1)^2 - (y-3)^2 = 12}$$

$$\mathbf{\Leftrightarrow (2x+3y-1-y+3)(2x+3y-1+y-3) = 12}$$

$$\mathbf{\Leftrightarrow (2x+2y+2)(2x+4y-4) = 12}$$

$$\mathbf{\Leftrightarrow (x+y+1)(x+2y-2) = 3}$$

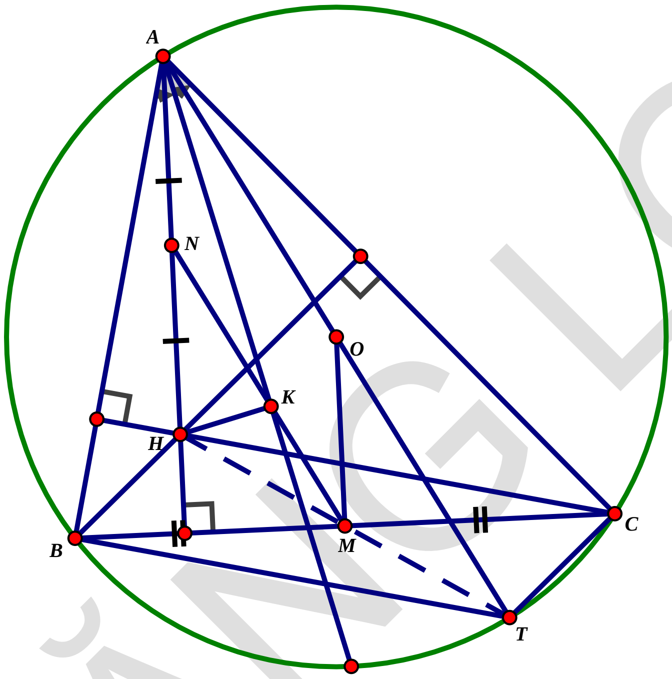
Do x, y nguyên nên, ta có bảng sau:

$x+y+1$	1	-1	3	-3
$x+2y-2$	3	-3	1	-1
x	-5	-3	1	-9
y	5	1	1	5

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm nguyên $(x;y)=(-5;5),(-3;1),(1;1),(-9;5)$

Bài 5: (5 điểm)

1) Cho tam giác nhọn ABC có H là trực tâm. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AH. Đường phân giác trong góc A cắt MN tại K. Chứng minh rằng AK vuông góc với HK.



Gọi O là tâm của (ABC)

Vẽ đường kính AT của (O).

Ta dễ chứng minh tứ giác BHCT là hình bình hành

$\Rightarrow$ 2 đường chéo BC và HT cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

Mà M là trung điểm của BC nên M là trung điểm của HT.

Do đó, ta chứng minh được MN là đường trung bình của $\Delta AHT \Rightarrow$ MN // AT

Ta có: $\begin{cases} BAK = CAK(...) \\ BAH = CAT(\text{dễ chứng minh}) \end{cases}$

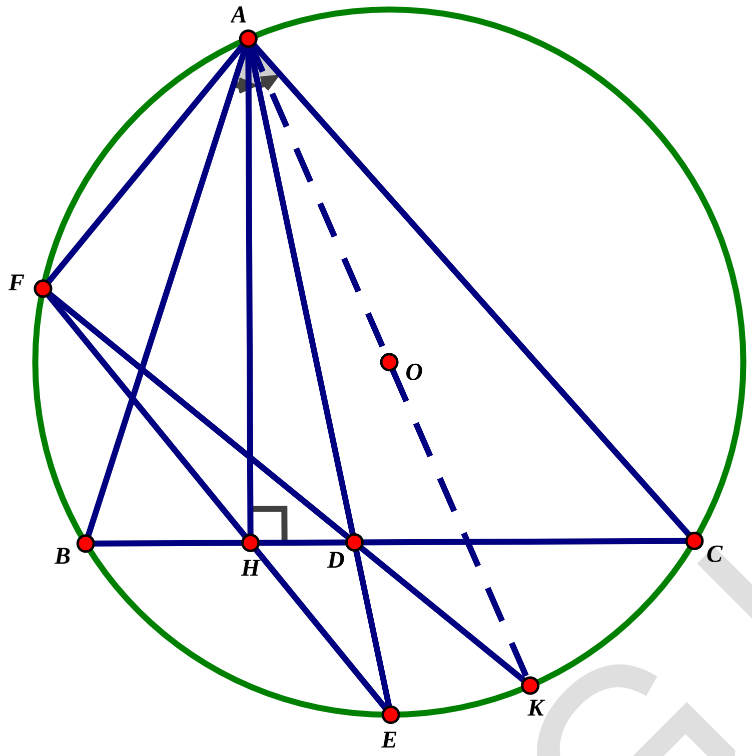
$\Rightarrow BAK - BAH = CAK - CAT \Rightarrow HAK = TAK$

Mà $TAK = AKN$ (2 góc so le trong và MN // AT)

Nên $HAK = AKN \Rightarrow \Delta NAK$ cân N $\Rightarrow$ KN = NA

Mặt khác $NA = \frac{1}{2}AH$ nên $KN = \frac{1}{2}AH \Rightarrow \Delta KAN$ vuông tại K $\Rightarrow HK \perp AK$

2) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi AH, AD lần lượt là đường cao , đường phân giác trong của tam giác ABC $\left(\mathbf{H, D} \in \mathbf{BC}\right)$. Tia AD cắt (O) tại E, tia EH cắt (O) tại F và tia FD cắt (O) tại K. Chứng minh rằng: AK là đường kính của (O).



Gọi E là giao điểm của tia AD và (O)

Do đó, ta chứng minh được sđ $\mathbf{EA}$ = sđ $\mathbf{EC}$

Mà $\mathbf{FHB} = \dfrac{1}{2}\left(\mathbf{sđBF} + \mathbf{sđEC}\right)$ (góc có đỉnh bên trong đường tròn chắn $\mathbf{BF}$ và $\mathbf{EC}$)

Nên $\mathbf{FHB} = \dfrac{1}{2}\left(\mathbf{sđBF} + \mathbf{sđEB}\right) \Rightarrow \mathbf{FHB} = \dfrac{1}{2}\mathbf{sđEF}$

Mặt khác $\mathbf{FAD} = \dfrac{1}{2}\mathbf{sđEF}$ (góc nội tiếp chắn $\mathbf{BF}$ của (O))

Nên $\mathbf{FHB} = \mathbf{FAD} \Rightarrow$ tứ giác AFHD nội tiếp $\Rightarrow \mathbf{AFD} = \mathbf{AHD} = \mathbf{90^0}$

Mà $\mathbf{AFD} = \dfrac{1}{2}\mathbf{AOK}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm chắn $\mathbf{AK}$ của (O))

Nên $\mathbf{90^0} = \dfrac{1}{2}\mathbf{AOK} \Rightarrow \mathbf{AOK} = \mathbf{180^0} \Rightarrow$ A, O, K thẳng hàng

Mặt khác AK là dây cung của (O) nên AK là đường kính của (O).

Bài 6: (2 điểm)

Trong tuần, mỗi ngày Nam chỉ chơi một môn thể thao. Nam chạy ba ngày một tuần nhưng không bao giờ chạy trong hai ngày liên tiếp. Vào thứ Hai, anh ta chơi bóng bàn và hai ngày sau đó anh ta chơi bóng đá. Nam còn đi bơi và chơi cầu lông, nhưng không bao giờ Nam chơi cầu lông sau ngày anh ta chạy hoặc bơi. Hỏi ngày nào trong tuần Nam đi bơi?

Theo đề bài, Nam chơi bóng bàn thứ Hai và chơi bóng đá vào thứ Tư.
Do đó, Nam chạy 3 ngày không thể rơi vào từ thứ Năm đến Chủ nhật (vì sẽ có 2 ngày chạy liên tiếp)
$\Rightarrow$ có một ngày Nam chạy vào thứ Ba.
Vì vậy, 2 ngày chạy còn lại sẽ rơi vào từ thứ Năm đến Chủ nhật.
Ta xét 3 trường hợp sau:
TH1: Nam chạy vào thứ Năm + thứ Bảy
$\Rightarrow$ Nam chơi cầu lông thứ Sáu hoặc Chủ nhật đều không thỏa đề (vì đều ngày sau chạy)
TH2: Nam chạy vào thứ Năm + Chủ nhật
$\Rightarrow$ Nam không thể chơi cầu lông vào thứ Sáu mà phải chơi cầu lông vào thứ Bảy
$\Rightarrow$ Nam bơi vào thứ Sáu (loại vì khi đó Nam chơi cầu lông vào thứ Bảy sau ngày bơi)
TH3: Nam chạy vào thứ Sáu + Chủ nhật
$\Rightarrow$ Nam không thể chơi cầu lông vào thứ Bảy mà phải chơi cầu lông vào thứ Năm
$\Rightarrow$ Nam bơi vào thứ Bảy (thỏa đề).
Vậy thứ Bảy trong tuần, Nam đi bơi.

❀ ❀ HẾT ❀ ❀